Soru: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{xy} + zy$ fonksiyonunun $(1,1,0)$ noktasında $(1,-1,2)$ vektörü boyunca yönlü türevini bulunuz.

ÇÖZÜM: $u = (1,-1,2)$ birim vektör değildir

$$\|u\| = \|(+1,-1,2)\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad \text{olup}$$

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{birim vektör olur}$$

$$D_v f(1,1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((1,1,0) + t\left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{-1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}\right)\right) - f((1,1,0))}{t}$$

biçimindedir

$$f\left((1,1,0) + t\left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{-1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}\right)\right) = f\left(\left(1+\frac{t}{\sqrt6}, 1-\frac{t}{\sqrt6}, \frac{2t}{\sqrt6}\right)\right)$$

$$= e^{1-\frac{t^2}{6}} + \frac{2t}{\sqrt6} - \frac{2t^2}{6}$$

ve

$$f((1,1,0)) = e^1 = e$$

olup

$$D_v f(1,1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((1,1,0) + t\left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{-1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}\right)\right) - f((1,1,0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{1-\frac{t^2}{6}} + \frac{2t}{\sqrt6} - \frac{t^2}{3} - e}{t} \longrightarrow \frac{0}{0} \quad (\text{L' Hospital})$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{1-\frac{t^2}{6}} \cdot \left(-\frac{t}{3}\right) + \frac{2}{\sqrt6} - \frac{2t}{3}}{1}$$

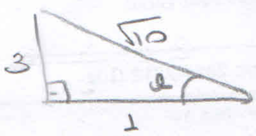
$$= \frac{2}{\sqrt6}$$

$$= \frac{\sqrt6}{3}$$

elde edilir

Soru : $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasında $y=3x-1$ doğrusu boyunca x ve y nin arttığı yöndeki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM $y=3x-1$ doğrusunun eğimi $m=3$ olduğundan v birim vektörünün eğimi de 3 olup x ekseniyle yaptığı θ açısı için $\tan\theta = 3$ dur.



$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ olup

$$v=(x_1,y_1)=\left(\|v\|\cos\theta,\ \|v\|\sin\theta\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

bulunur.

$$D_v f(1,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left((1,1)+t\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)-f((1,1))}{t}$$

biçimindedir.

$$f\left((1,1)+t\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)=f\left(\left(1+\frac{t}{\sqrt{10}},\ 1+\frac{3t}{\sqrt{10}}\right)\right)$$

$$=\cancel{1}+\frac{2t}{\sqrt{10}}+\frac{t^2}{10}+1+\frac{6t}{\sqrt{10}}+\frac{9t^2}{10}$$

$$-\cancel{1}-\frac{3t}{\sqrt{10}}-\frac{t}{\sqrt{10}}-\frac{3t^2}{10}$$

$$=\frac{7t^2}{10}+\frac{4t}{\sqrt{10}}+1$$

$$f((1,1))=1-1+1=1$$

olup

$$D_v f(1,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left((1,1)+t\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)-f((1,1))}{t}$$

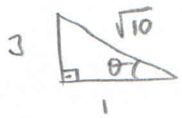
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{7t^2}{10}+\frac{4t}{\sqrt{10}}+1-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{7t}{10}+\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

3) $f(x,y) = x^2y^2$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki eğer varsa $l: y = 3x+6$ boyunca türevini bulunuz.

Çözüm: $y = 3x+6$ doğrusunun eğimi $m = \tan\theta = 3$ dir.

$v = (\cos\theta, \sin\theta)$ olarak alınabilirdi.



$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0) + t\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{10} \cdot \frac{9t^2}{10} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{9t^3}{100} = 0$$

UYGULAMA (7)

1) Aşağıdaki fonksiyonların verilen P noktasında v vektörü yönündeki türevlerini bulunuz.

a) $f(x,y)=x^2+\cos\frac{xy}{2}$, $P=(1,\pi)$, $v=(-1,2)$

b) $f(x,y,z)=(x+y-1)^2+(2x-y-3)^2$, $P=(1,1,0)$, $v=(2,3,0)$

c) $f(x,y,z)=\cos(x^2+y^2)+e^{xy}$, $P=(\sqrt{\pi/2},\sqrt{\pi/2})$, $v=(-2,-3)$

Çözüm: a) $v=(-1,2)$ birim vektör değildir. v'yi birimli hale getirebiliriz.

$$v=\frac{(-1,2)}{\|(-1,2)\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$D_v f(1,\pi)=\lim_{t\to0}\frac{f\left((1,\pi)+t\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)\right)-f(1,\pi)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f\left(1-\frac{t}{\sqrt5},\pi+\frac{2t}{\sqrt5}\right)-f(1,\pi)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\left(1-\frac{t}{\sqrt5}\right)^2+\cos\frac{\left(1-\frac{t}{\sqrt5}\right)\left(\pi+\frac{2t}{\sqrt5}\right)}{2}-1}{t}$$

$$\overset{\left(\frac00\right)}{=}\lim_{t\to0}-\frac{2}{\sqrt5}\left(1-\frac{t}{\sqrt5}\right)-\frac12\sin\frac{\left(1-\frac{t}{\sqrt5}\right)\cdot\left(\pi+\frac{2t}{\sqrt5}\right)}{2}\cdot\left[-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\left(\pi+\frac{2t}{\sqrt5}\right)+\frac{2}{\sqrt5}\left(1-\frac{t}{\sqrt5}\right)\right]$$

$$=-\frac{2}{\sqrt5}-\frac12\cdot\left(-\frac{\pi}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\right)=-\frac{2}{\sqrt5}+\frac{\pi}{2\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{3}{\sqrt5}+\frac{\pi}{2\sqrt5}$$

b) $$v=\frac{(2,3,0)}{\sqrt{13}}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},0\right)$$

$$D_v f(1,1,0)=\lim_{t\to0}\frac{f\left((1,1,0)+t\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},0\right)\right)-f(1,1,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f\left(1+\frac{2t}{\sqrt{13}},1+\frac{3t}{\sqrt{13}},0\right)-f(1,1,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\left(1+\frac{5t}{\sqrt{13}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{13}}-2\right)^2-5}{t}$$

$$\overset{\left(\frac00\right)}{=}\lim_{t\to0}\frac{2\cdot5}{\sqrt{13}}\cdot\left(1+\frac{5t}{\sqrt{13}}\right)+\frac{2}{\sqrt{13}}\left(\frac{t}{\sqrt{13}}-2\right)=\frac{10}{\sqrt{13}}-\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

8) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ~~f fonksiyonu~~ $f(x,y,z) = |x+y+z|$ olarak tanımlanıyor. Bu fonksiyonun $D_v f(e_1-e_2)$ yönlü türevinin var olması için $v \in \mathbb{R}$ olmalıdır?

Çözüm: $v=(v_1,v_2,v_3)$, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$

$$e_1-e_2 = (1,-1,0)$$

$$D_v f(e_1-e_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,-1,0)+t(v_1,v_2,v_3)) - f(1,-1,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(1+tv_1, -1+tv_2, tv_3) - f(1,-1,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t(v_1+v_2+v_3)| - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|\,.\,|v_1+v_2+v_3|}{t}$$

$|v_1+v_2+v_3| \neq 0$ ise

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|t|\,.\,|v_1+v_2+v_3|}{t} = |v_1+v_2+v_3| \quad \text{ve}$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{|t|\,.\,|v_1+v_2+v_3|}{t} = -|v_1+v_2+v_3|$$ olduğundan limit yoktur.

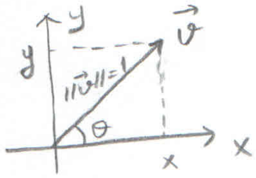
Bu sebeple $|v_1+v_2+v_3|=0$ olmalıdır. Yani $v_1+v_2+v_3=0$ olmalıdır.

$v_2=t$, $v_3=k$ dersek $v_1=-t-k$ bulunur.

$v=(v_1,v_2,v_3) = \{(-t-k, t, k) \mid t,k \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir.

6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında hangi yönde yönlü türevi olduğunu araştırınız.

Çözüm:



$\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\|\vec{v}\| = 1$

$$\frac{f((0,0)+t v) - f(0,0)}{t} = \frac{f((0,0)+t(\cos\theta, \sin\theta)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - 1}{t}$$

$$= \frac{2 \cdot \dfrac{t\cos\theta \, t\sin\theta}{t^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} - 1}{t}$$

$$= \frac{\sin 2\theta - 1}{t}$$

$\sin 2\theta = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

~~2θ~~

$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$= \begin{cases} 0 , & \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \dfrac{\sin 2\theta - 1}{t} , & \theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t v) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 2\theta - 1}{t} = \begin{cases} 0 , & \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \infty , & \theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ iken $D_v f(0,0)$ yönlü türevi vardır ve $D_v f(0,0) = 0$ dı

Ancak $\theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ iken yönlü türevi yoktur.

NOT: f fonksiyonu $(0,0)$ da sürekli olmadığından türevlenemez. Fakat $(0,0)$ da $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ olduğunda v vektörü yönünde yönlü türevi vardır. Yönlü türevin olması türevin olmasını gerektirm

9) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasındaki gradiyentini bulunuz.

Çözüm: $\text{grad} f(1,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{5}$$

$$\text{grad} f(1,2) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

10) $f(x,y,z) = y^2+2xz-x^2+3yz+z^2$ fonksiyonunun $(1,2,0)$ noktasındaki gradiyentini bulunuz.

Çözüm: $\text{grad} f(1,2,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,0), \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0) \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2z-2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y+3z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,0) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2x+3y+2z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0) = 8$$

$$\text{grad} f(1,2,0) = (-2,4,8)$$

11) $f(x,y,z) = e^x\cos y - e^y \sin z$ fonksiyonunun $(1,0,\frac{\pi}{2})$ noktasındaki gradiyentini bulunuz.

Çözüm: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^x\cos y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0,\frac{\pi}{2}) = e$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -e^x\sin y - e^y \sin z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -e^y\cos z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$\text{grad} f(1,0,\tfrac{\pi}{2}) = (e,-1,0)$$

Soru: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = -1$$

$$f_x(0,h) = \lim_{k\to 0} \frac{f(k,h) - f(0,h)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k^3h - h^3k}{h^2+k^2} - 0}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k^2h - h^3}{h^2+k^2} = -h$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$f_y(h,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{h^3k - k^3h}{h^2+k^2} - 0}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{h^3 - k^2h}{h^2+k^2} = h$$

Soru: $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun

$f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$ kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}$$

$$f_x(0,h)=\lim_{k\to 0}\frac{f(k,h)-f(0,h)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{kh\,\dfrac{k^2-h^2}{k^2+h^2}-0}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0} h\cdot\frac{k^2-h^2}{k^2+h^2}$$

$$=-h$$

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_y(k,0)-f_y(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k-0}{k}=1$$

$$f_y(k,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(k,h)-f(k,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{kh\,\dfrac{k^2-h^2}{k^2+h^2}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}k=k$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}$$

$$=0$$

16-)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ fonksiyonu veriliyor.

$f_x(0,0)=?$ $\quad f_y(0,0)=?$ $\quad f_{xy}(0,0)=?$ $\quad f_{xx}(0,0)=?$

Çözüm:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{\sqrt{h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{\sqrt{h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_{xx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_x(h,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(h+k,0)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{|h|}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{|h|}=\text{yok.}$$

$$f_x(0,h)=\lim_{k\to0}\frac{f(k,h)-f(0,h)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{kh}{\sqrt{k^2+h^2}}-0}{k}$$

$$=\lim_{k\to0}\frac{h}{\sqrt{k^2+h^2}}=\frac{h}{|h|}$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{|h|}=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}=+\infty$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{1}{|h|}=\lim_{h\to0^-}\frac{1}{-h}=-\infty$$

15)
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right] &, \quad x\neq y \\ 0 &, \quad x=y \end{cases}$$
fonksiyonu veriliyor.

a) $f_{xy}(0,0)=?$ $\quad f_{yx}(0,0)=?$

b) f, C^2 sınıfından mıdır?

Çözüm: a)

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

$$f_x(0,h)=\lim_{k\to 0}\frac{f(k,h)-f(0,h)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\cancel{k}h\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{k+h}{k-h}\right)\right]-0}{\cancel{k}}$$

$$=\lim_{k\to 0} h.\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{k+h}{k-h}\right)\right]$$

$$=-h$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

$$f_y(h,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{h\cancel{k}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{h+k}{h-k}\right)\right]}{\cancel{k}}$$

$$=\lim_{k\to 0} h.\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{h+k}{h-k}\right)\right]$$

$$=h$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

b) f, C^2 sınıfından olsaydı Schwarz teoremi gereği $f_{xy}=f_{yx}$ olurdu. $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ olduğundan f, C^2 sınıfından değildir, yani f_{xy} ve f_{yx} sürekli değildir.

Problem: Her $\alpha \geq 1$ için

$$f(x,y) = \begin{cases} (xy)^\alpha \cdot \ln(x^2+y^2) & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında diferansiyellenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(0,0)$ da dif. bilir mi?

$$f(x,y) - f(0,0) = (xy)^\alpha \cdot \ln(x^2+y^2) - 0$$

$$= 0 + \frac{(xy)^\alpha \cdot \ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^\alpha \cdot \ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ mı?}$$

$$\left| \frac{(xy)^\alpha \cdot \ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\alpha \cdot \ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\alpha \cdot (x^2+y^2)}{|x|}$$

$$= |x|^{\alpha-1} \, |y|^\alpha \cdot (x^2+y^2)$$

$$< \delta^{\alpha-1} \, \delta^\alpha \cdot (\delta^2+\delta^2)$$

$\delta \to 0$

$$= 2\,\delta^{2\alpha+1}$$

$\boxed{0<\delta<1}$

$$< 2\delta = \varepsilon$$

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Soru) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0)$da diferansiyellenebilir mi?

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{(xy)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Lineer dsn.}}}{0} + \underbrace{\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}}_{r(x,y)} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ mi? $\forall \varepsilon > 0$ ver. $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ old. $\left| \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ o.s. $\delta > 0$ var mı?

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2 < \delta^2 < \delta = \varepsilon$$
$0 < \delta < 1$

$$\delta = \min\{1, \varepsilon\}$$

Soru: $f(x,y,z) = (\underbrace{\sin(xyz)}_{f_1}, \underbrace{xz}_{f_2})$ fonksiyonu için

$J_f(x,y,z) = ?$

$J_f(\pi,2,4) = ?$

$Df(\pi,2,4) = ?$

Çözüm:

$$Df(\pi,2,4)(x,y,z) = J_f(\pi,2,4) \cdot \begin{bmatrix} x-\pi \\ y-2 \\ z-4 \end{bmatrix}$$

$$J_f(\pi,2,4) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(\pi,2,4)} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(\pi,2,4)} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial z}\right|_{(\pi,2,4)} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(\pi,2,4)} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(\pi,2,4)} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial z}\right|_{(\pi,2,4)} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} yz\cos(xyz)\big|_{(\pi,2,4)} & xz\cos(xyz)\big|_{(\pi,2,4)} & xy\cos(xyz)\big|_{(\pi,2,4)} \\ z\big|_{(\pi,2,4)} & 0\big|_{(\pi,2,4)} & x\big|_{(\pi,2,4)} \end{bmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} x-\pi \\ y-2 \\ z-4 \end{bmatrix}}_{3\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4\pi & 2\pi \\ 4 & 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\pi \\ y-2 \\ z-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8(x-\pi) + 4\pi(y-2) + 2\pi(z-4) \\ 4(x-\pi) + 0.(y-2) + \pi(z-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8x + 4\pi y + 2\pi z - 24\pi \\ 4x + \pi z - 8\pi \end{bmatrix}$$

Soru: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y) = (\sin x, \cos x - 2y, e^{\sin y}, \arctan(xy))$ fonksiyonunun Jacobi matrisini yazınız.

Çözüm: $f_1(x,y) = \sin x$

$(f_1)_x = \cos x \qquad (f_1)_y = 0$

$f_2(x,y) = \cos x - 2y$

$(f_2)_x = -\sin x \qquad (f_2)_y = -2$

$f_3(x,y) = e^{\sin y}$

$(f_3)_x = 0 \qquad (f_3)_y = e^{\sin y} \cdot \cos y$

$f_4(x,y) = \arctan(xy)$

$(f_4)_x = \dfrac{1}{1+(xy)^2} \cdot y \qquad (f_4)_y = \dfrac{1}{1+(xy)^2} \cdot x$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & -2 \\ 0 & e^{\sin y} \cdot \cos y \\ \dfrac{y}{1+(xy)^2} & \dfrac{x}{1+(xy)^2} \end{bmatrix}$$

Soru: $f(x,y) = (y^2, xy, x^3)$ ve $g(u,v,w) = (u^2 - v,\ w.e^{uv},\ w)$ fonksiyonları veriliyor. $D(g\circ f)(x,y)$ yi bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = (u,v,w) \rightarrow g(u,v,w)$$

$$g\left[y^4 - xy,\ x^3 e^{xy^3},\ x^3\right]$$

$u(x,y) = y^2 \quad (f_1)$

$v(x,y) = xy \quad (f_2)$

$w(x,y) = x^3 \quad (f_3)$

$g_1(u,v,w) = u^2 - v$

$g_2(u,v,w) = w.e^{uv}$

$g_3(u,v,w) = w$

$$J_{g\circ f}(x,y) = J_g(f(x,y)) \, . \, J_f(x,y)$$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ y & x \\ 3x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_g(f(x,y)) = J_g(u,v,w) = \begin{bmatrix} 2u & -1 & 0 \\ w.e^{uv}.v & we^{uv}.u & e^{uv} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & -1 & 0 \\ x^4 y e^{xy^3} & x^3 y^2 e^{xy^3} & e^{xy^3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{g\circ f}(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 & -1 & 0 \\ x^4 y e^{xy^3} & x^3 y^2 e^{xy^3} & e^{xy^3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} . \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ y & x \\ 3x^2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} -y & 4y^3 - x \\ (x^3y^3 + 3x^2)e^{xy^3} & 3x^4y^2e^{xy^3} \\ 3x^2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$D(g\circ f)(x,y) = J_{g\circ f}(x,y) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} -2xy + 4y^4 \\ (x^4y^3 + 3x^3)e^{xy^3} + 3x^4y^3e^{xy^3} \\ 3x^3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$-2y + 4y^3$

Soru: $f(x,y) = y^3 + x^2 - 6xy + 4y - 5$ fonksiyonu ve $P=(-1,1)$, $Q=(3,2)$ noktaları verilsin. Ortalama değer teoremini uygulayarak c noktasını bulunuz.

Çözüm: Aranan c noktası

$$c = (1-t_0).P + t_0.Q = (1-t_0)(-1,1) + t_0(3,2) = (4t_0 - 1,\ 1+t_0)$$

olup, ortalama değer teoreminden dolayı

$$f(Q) - f(P) = Df(c).(Q-P)$$

yazılır.

$$f_x(x,y) = 2x - 6y$$

$$f_y(x,y) = 3y^2 - 6x + 4$$

olduğundan

$$f_x(c) = f_x(4t_0-1, 1+t_0) = 2(4t_0-1) - 6(1+t_0) = 2t_0 - 8$$

$$f_y(c) = f_y(4t_0-1, 1+t_0) = 3(1+t_0)^2 - 6(4t_0-1) + 4 = 3t_0^2 - 18t_0 + 13$$

bulunur. Böylece

$$f(3,2) - f(-1,1) = (f_x(c), f_y(c)).((3,2)-(-1,1))$$

$$-16-7 = (2t_0 - 8,\ 3t_0^2 - 18t_0 + 13)(4,1)$$

$$-23 = 8\cancel{t_0} - 32 + 3\cancel{t_0^2} - 18\cancel{t_0} + 13$$

$$-23 = 3t_0^2 - 10t_0 - 19$$

$$3t_0^2 - 10t_0 + 4 = 0$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 52$$

$$t_0 = \frac{10 - \sqrt{52}}{6}, \quad t_0 = \frac{10 + \sqrt{52}}{6} \notin (0,1)$$

$$t_0 = \frac{10 - 2\sqrt{13}}{6} \in (0,1)$$

Soru: $f(x,y,z) = xy^2 - 2x + 3x^2z$ fonksiyonu ve $P=(1,0,1)$, $Q=(0,1,2)$ noktaları verilsin. Ortalama değer teoremini uygulayarak c noktasını bulunuz.

Çözüm: Aranan c noktası $0<t_0<1$ olmak üzere

$$c = (1-t_0).P + t_0.Q = (1-t_0)(1,0,1) + t_0(0,1,2) = (1-t_0, t_0, 1+t_0)$$

olup Ortalama değer teoremi gereği

$$f(Q) - f(P) = Df(c).(Q-P)$$

yazılır. Yine

$$f_x(x,y,z) = y^2 - 2 + 6xz$$

$$f_y(x,y,z) = 2xy$$

$$f_z(x,y,z) = 3x^2$$

ve dolayısıyla

$$f_x(c) = f_x(1-t_0, t_0, 1+t_0) = t_0^2 - 2 + 6(1-t_0)(1+t_0) = 4 - 5t_0^2$$

$$f_y(c) = f_y(1-t_0, t_0, 1+t_0) = 2(1-t_0)t_0 = 2t_0 - 2t_0^2$$

$$f_z(c) = f_z(1-t_0, t_0, 1+t_0) = 3(1-t_0)^2 = 3 - 6t_0 + 3t_0^2$$

olur. Böylece

$$f(0,1,2) - f(1,0,1) = (f_x(c), f_y(c), f_z(c)).((0,1,2) - (1,0,1))$$

yazılır. Buradan

$$0 - 1 = (4 - 5t_0^2, 2t_0 - 2t_0^2, 3 - 6t_0 + 3t_0^2).(-1,1,1)$$

$$-1 = \cancel{5t_0^2} - 4 + \cancel{2t_0} - \cancel{2t_0^2} + 3 - \cancel{6t_0} + \cancel{3t_0^2}$$

$$-1 = 6t_0^2 - 4t_0 - 1$$

$$6t_0^2 - 4t_0 = 0$$

$$2t_0(3t_0 - 2) = 0$$

$$t_0 = 0 \quad \text{veya} \quad t_0 = \frac{2}{3} \in (0,1)$$

$$c = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Soru: $f(x,y) = xy + y^2$ fonksiyonunun $(3,2)$ noktasında hangi yöndeki yönlü türevi sıfırdır?

Çözüm: (u,v) birim vektör.

$$u^2 + v^2 = 1$$

$$f_x = y \qquad f_x(3,2) = 2$$

$$f_y = x + 2y \qquad f_y(3,2) = 7$$

$$D_{(u,v)} f(3,2) = \langle (f_x(3,2), f_y(3,2)), (u,v) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2u + 7v = 0$$

$$v = -\frac{2}{7} u$$

$$u^2 + v^2 = 1 \Rightarrow u^2 + \frac{4}{49} u^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{53}{49} u^2 = 1$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{49}{53}$$

$$\Rightarrow u = -\frac{7}{\sqrt{53}}, \quad u = \frac{7}{\sqrt{53}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$v = \frac{2}{\sqrt{53}}, \quad v = \frac{-2}{\sqrt{53}}$$

$\left(-\frac{7}{\sqrt{53}}, \frac{2}{\sqrt{53}}\right)$ ve $\left(\frac{7}{\sqrt{53}}, \frac{-2}{\sqrt{53}}\right)$ yönlerinde

yönlü türev 0 olur.

3) $f(x,y) = e^x \arctan y$ fonksiyonuna $(1,1)$ noktası civarında 2. dereceden türevleri içeren terimlere kadar Taylor formülünü uygulayınız.

Çözüm: $f(x,y) = e^x \arctan y$ $\qquad f(1,1) = e \cdot \frac{\pi}{4}$

$f_x(x,y) = e^x \arctan y \qquad f_x(1,1) = e \cdot \frac{\pi}{4}$

$f_{xx}(x,y) = e^x \cdot \arctan y \qquad f_{xx}(1,1) = e \cdot \frac{\pi}{4}$

$f_y(x,y) = \dfrac{e^x}{1+y^2} \qquad f_y(1,1) = \dfrac{e}{2}$

$f_{yy}(x,y) = e^x \cdot \dfrac{-1}{(1+y^2)^2} \cdot 2y \qquad f_{yy}(1,1) = -\dfrac{e}{2}$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{e^x}{1+y^2} \qquad f_{xy}(1,1) = \dfrac{e}{2}$

$$f(x,y) = e\frac{\pi}{4} + (x-1) \cdot e \cdot \frac{\pi}{4} + (y-1) \cdot \frac{e}{2} + \frac{1}{2!}\left((x-1)^2 \cdot e \cdot \frac{\pi}{4} + 2(x-1)(y-1) \cdot \frac{e}{2} + (y-1)^2 \cdot \frac{-e}{2} \right) + R_3$$

$$= e\frac{\pi}{4} + e\frac{\pi}{4}(x-1) + \frac{e}{2}(y-1) + e\frac{\pi}{8}(x-1)^2 + \frac{e}{2}(x-1)(y-1) - \frac{e}{4}(y-1)^2 + R_3$$

ÖDEV

4) $f(x,y) = x^2y$ fonksiyonunun $(1,-2)$ noktası civarındaki 2. dereceden Taylor polinomunu ve R_3 kalanını içeren Taylor formülünü yazınız.

Çözüm: $f(x,y) = x^2y$

$f(1,-2) = -2$

$f_x(x,y) = 2xy$ $\qquad f_x(1,-2) = -4$

$f_{xx}(x,y) = 2y$ $\qquad f_{xx}(1,-2) = -4$

$f_y(x,y) = x^2$ $\qquad f_y(1,-2) = 1$

$f_{yy}(x,y) = 0$ $\qquad f_{yy}(1,-2) = 0$

$f_{xy}(x,y) = 2x$ $\qquad f_{xy}(1,-2) = 2$

$$f(x,y) = f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h.f_x(x_0,y_0) + k.f_y(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left[h^2 f_{xx}(x_0,y_0) + 2hk f_{xy}(x_0,y_0) + k^2 f_{yy}(x_0,y_0)\right] + R_3$$

$h = x - x_0 = x - 1$, $k = y - y_0 = y + 2$

$$f(x,y) = f(1,-2) + (x-1) f_x(1,-2) + (y+2).f_y(1,-2) + \frac{1}{2!}\left[(x-1)^2 f_{xx}(1,-2) + 2(x-1)(y+2) f_{xy}(1,-2) + (y+2)^2 f_{yy}(1,-2)\right] + R_3$$

$$= -2 + (x-1).(-4) + (y+2).1 + \frac{1}{2!}\left((x-1)^2.(-4) + 2(x-1)(y+2).2 + (y+2)^2.0\right) + R_3$$

$$= -2 - 4(x-1) + (y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + R_3$$